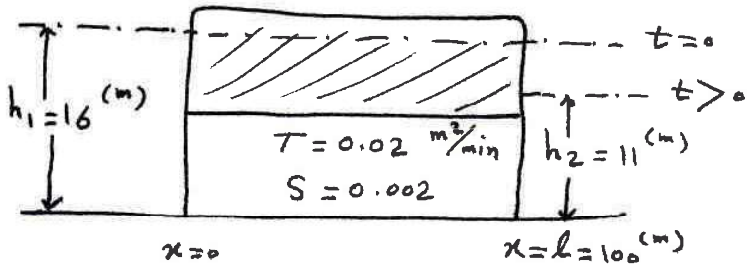
«حل معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان»

تکلیف: سفره محصوری مطابق شکل زیر در نظر بگیرید:



هد اولیه در تمام نقاط آکیفر برابر ۱۶ (m) بوده است. اگر در زمان t=0 بطور ناگهانی سطح آب در مخزن در x=l از ۱۶ (m) به ۱۱ (m) کاهش یابد، تغییرات هد در آکیفر، در طول زمان را شبیه سازی کنید.

- پارامترهای آکیفر عبارتند از: $T=0.02\ m^2/min$ و $S=0.002$

- فرض کنید از تغییرات در جهت y (عمود بر صفحه کاغذ) صرفنظر می‌کنیم، پس معادله حاکم بصورت یک بعدی درمکان و بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}$$

- شرایط مرزی عبارتند از: $h(0,t)=h_1$ و $h(l,t)=h_2$ برای $t>0$

$h_1=16$ (m) و $h_2=11$ (m) و $l=100$ (m)

- شرط اولیه عبارتست از: $h(x,0)=h_1$ برای $0\le x\le l$

« حل معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان »

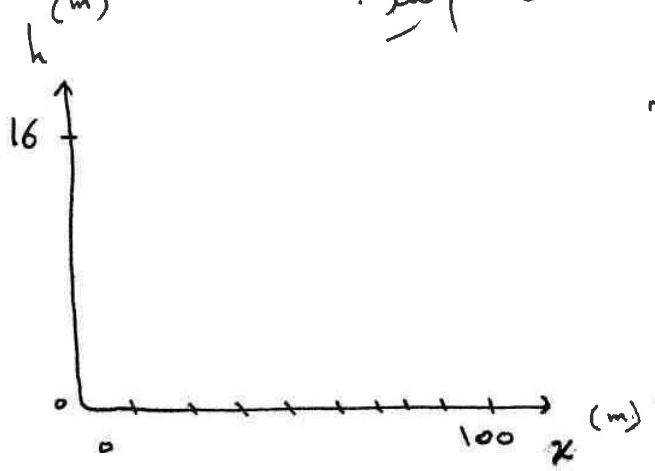
- راهنمایی : روش تفاضل محدود صریح ، معادله حاکم را به شکل زیر تقریب می زنند :

$$\frac{h_{i+1}^{n} - 2h_i^{n} + h_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2} = \frac{S}{T}\left(\frac{h_i^{n+1} - h_i^{n}}{\Delta t}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow h_i^{n+1} = h_i^{n} + \frac{T\Delta t}{S}\left(\frac{h_{i+1}^{n} - 2h_i^{n} + h_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right)$$

- فاصله نقاط در راستای x را برابر $10^{(m)}$ در نظر بگیرید.

- همانطور که قبلاً گفته شد، جهت پایداری حل باید $\frac{T\Delta t}{S(\Delta x)^2} \leq 0.5$ باشد که در این مسئله با جایگذاری Δt و S و Δx، باید $\Delta t \leq 5^{min}$ باشد. در اینجا Δt را 5 دقیقه در نظر بگیرید و جدولی از مقادیر هد در هر گره در گام های زمانی مختلف را رسم کنید. همچنین نمودار هد نسبت به مکان را در زمان های $t=10^{min}$ و $t=100^{min}$ و $t=400^{min}$ را مانند شکل زیر با Excel رسم کنید.

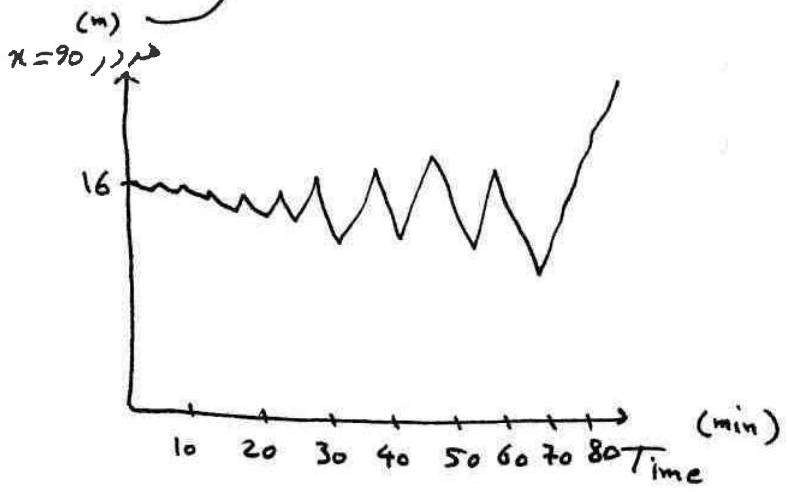


و نشان دهید که در $t=400^{(min)}$ جواب به حالت ماندگار (Steady) می رسد که همان حل معادله لاپلاس بصورت زیر است :

« حل معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان »

$$h(x) = \left(\frac{h_2 - h_1}{\ell}\right) x + h_1$$

- همچنین نشان دهید که اگر Δt بیش از ۵ دقیقه (مثلاً ۸ دقیقه) در نظر گرفته شود، جواب ناپایداری شود. برای این منظور، نمودارهای مانند شکل زیر را رسم کنید که در یکی از نقاط (مثلاً $x = 90^{(m)}$) در زمانهای مختلف را نشان دهید:



که باید همانند شکل مقابل رفتار نوسانی از خود نشان دهد.