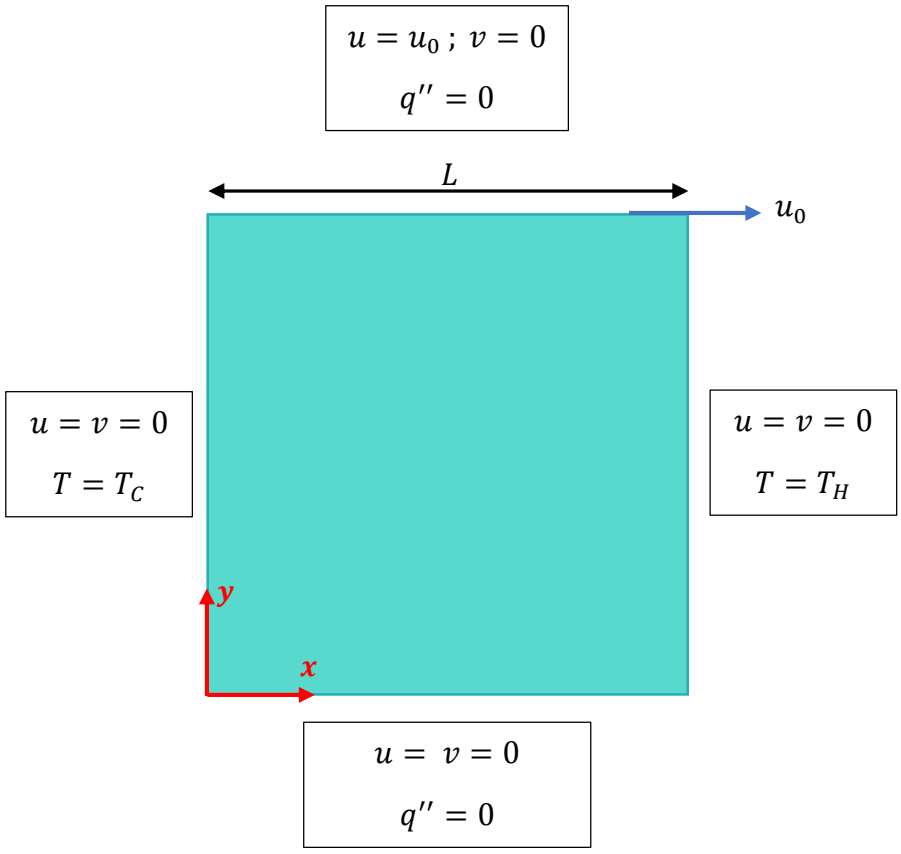
پروژه شماره۲

هدف: شبیه‌سازی جریان و انتقال حرارت در یک حفره با استفاده از روش تابع جریان[1]–ورتیسیتی[2]

هندسه حفره[3] در شکل ۱ نشان داده شده است. دیواره بالایی با سرعت u_0 به سمت راست حرکت می‌کند و سایر دیواره‌ها ساکن هستند. شرایط مرزی حرارتی هم به این صورت است که دیواره بالایی و پایینی عایق بوده و دما در دیواره‌های راست و چپ به‌ترتیب برابر با T_H و T_C است.



شکل۱) هندسه حفره

[1] Stream function
[2] vorticity
[3] cavity

به دلیل تغییرات چگالی با دما، از نظر فیزیکی جریان تراکم‌پذیر است؛ اما می‌توان با استفاده از تقریب بوزینسک[1] آن را به‌صورت تراکم‌ناپذیر مدل کرد. در تقریب بوزینسک، فرض می‌شود که خواص سیال (حتی چگالی) ثابت است و تغییرات چگالی به صورت یک جمله چشمه در معادله مومنتم ظاهر می‌شود ($g\beta(T-T_c)$) که به آن شتاب گرانشی می‌گویند. در این رابطه g شتاب گرانش و β ضریب انبساط حرارتی است. با توجه به توضیحات داده شده و با فرض اینکه جریان آرام و پایا است، معالات حاکم به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۱-۱)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (۱-۲)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+g\beta(T-T_c) \qquad (۱-۳)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \qquad (۱-۴)$$

در معادلات بالا، ν ویسکوزینه سینماتیکی سیال، ρ چگالی سیال و α ضریب پخش حرارت است. با تعریف پارامترهای بی‌بعد

$$X=\frac{x}{L} \qquad Y=\frac{y}{L} \qquad \tau=\frac{t\times u_0}{L}$$

$$U=\frac{u}{u_0} \qquad V=\frac{v}{u_0} \qquad P=\frac{p}{\rho u_0^2} \qquad \theta=\frac{(T-T_C)}{T_H-T_C}$$

فرم بی‌بعد معادلات به‌صورت زیر خواهد بود:

[1] Boussinesq approximation

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0 \qquad (۵-۱)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}+U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=-\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (۶-۱)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}+U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}=-\frac{\partial P}{\partial Y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right)+\mathrm{Ri}\,\theta \qquad (۷-۱)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau}+U\frac{\partial \theta}{\partial X}+V\frac{\partial \theta}{\partial Y}=\frac{1}{\mathrm{Pe}}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\right) \qquad (۸-۱)$$

که در آن، Re عدد رینولدز، Ri عدد ریچاردسون و Pe عدد پلکت هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{Re}=\frac{u_0\times L}{\nu}$$

$$\mathrm{Pe}=\mathrm{Re}\times\mathrm{Pr}\quad\Rightarrow\quad\mathrm{Pr}=\frac{\nu}{\alpha}$$

$$\mathrm{Ri}=\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}$$

در این رابطه Gr نشان‌دهنده عدد گراشف است و برابر است با:

$$\mathrm{Gr}=\frac{g\beta L^3(T_H-T_c)}{\nu^2}$$

خواسته‌های پروژه

الف) با استفاده از تعریف تابع جریان (ψ) و ورتیسیتی (ω) و قرار دادن آن‌ها در معادلات (۱- ۵) تا (۱- ۸) ، معادلات حاکم بر ψ و ω را استخراج نموده و شرایط مرزی حاکم بر متغیرهای جدید را به‌دست آوردید (شایان ذکر است که $\omega=\frac{\partial V}{\partial X}-\frac{\partial U}{\partial Y}$).

ب) معادلات حاصله از قسمت (الف) را با استفاده از روش تفاضل محدود گسسته‌سازی نمایید. برای گسسته‌سازی معادله حاکم بر تابع جریان از روش SOR و برای معادلات حاکم بر ورتیسیتی و انرژی از روش صریح (FTCS) استفاده کنید.

ج) معادلات گسسته‌سازی شده را در نرم‌افزار متلب کدنویسی کرده و در حالتی که جواب به حالت پایا رسیده باشد، خواسته‌های زیر را استخراج کنید (شایان ذکر است که کد مربوط به جریان در حفره بدون انتقال حرارت به شما داده شده است):

- **بررسی عدم وابستگی جواب‌ها به شبکه:** در حالت ایزوترمال و به ازای $\mathrm{Re} = 100$، سرعت V روی خط $Y = 0.5$ رسم کرده و شبکه‌ای که به ازای آن جواب مستقل از تعداد شبکه می‌شود را بیابید.
- **اعتبارسنجی نتایج:** به منظور اعتبارسنجی نتایج در حالت ایزوترمال و به ازای $\mathrm{Re} = 100$ مقادیر سرعت U روی خط $X = 0.5$ و V روی خط $Y = 0.5$ محاسبه نموده و با نتایج قیا و همکاران [۱] مقایسه نمایید.
- **رسم کانتور و نمودار متغیرهای مختلف و همچنین نمایش بردار سرعت:** با فرض اینکه $\mathrm{Re} = 100$، $\mathrm{Pr} = 0.7$، در هر یک از حالاتی که $\mathrm{Gr} = 10^3\ ,\ 10^4\ ,\ 10^5$ است، کانتور تابع جریان، ورتیسیتی، U، V و θ، بردار سرعت و پروفیل‌های U، V و θ روی خطوط $X = 0.5$ و $Y = 0.5$ را رسم کنید و در مورد تأثیر عدد ریچاردسون روی نتایج بحث کنید.
- **پردازش داده‌ها:** نیروی اصطکاک و نرخ انتقال حرارت بی‌بعد روی دیواره سمت چپ را در هریک از حالات $\mathrm{Gr} = 10^3\ ,\ 10^4\ ,\ 10^5$ محاسبه نمایید و در مورد تأثیر عدد ریچاردسون روی مقادیر آنها بحث کنید.

- **بخش امتیازی**: معادله حاکم بر فشار را استخراج کرده و کانتور فشار را در هریک از حالات $\mathrm{Gr} = 10^3 \ , \ 10^4 \ , \ 10^5$ رسم کنید (این مورد اختیاری است و امتیاز مثبت دارد).

توجه۱: همچنین معیار همگرایی جواب در روشهای تکراری 10^{-5} درنظر گرفته شود.

توجه۲: در رسم پروفیل‌ها، نمودار را بر حسب مختصات X و Y رسم کنید نه اندیس‌هایی مثل i و j.

فرمت گزارش:

۱- گزارش باید تایپ شده باشد. برای تایپ کلمات فارسی از قلم B Nazanin با اندازه ۱۴ و برای تایپ کلمات انگلیسی و فرمول‌ها از فونت Times New Roman با اندازه ۱۲ استفاده شود.

۲- صفحات شماره‌گذاری شده باشند.

۳- فرمول‌ها شماره‌دار بوده و جداول و اشکال دارای شماره و توضیحات باشند.

۴- گزارش باید شامل بخش‌های زیر باشد:

- چکیده
- فهرست، فهرست اشکال و جداول
- فصل اول:مقدمه
- فصل دوم:معادلات حاکم و نحوه گسسته‌سازی آن‌ها
- فصل سوم:نتایج حاصل از شبیه‌سازی و خواسته‌های پروژه
- فصل چهارم: بحث و نتیجه‌گیری
- مراجع

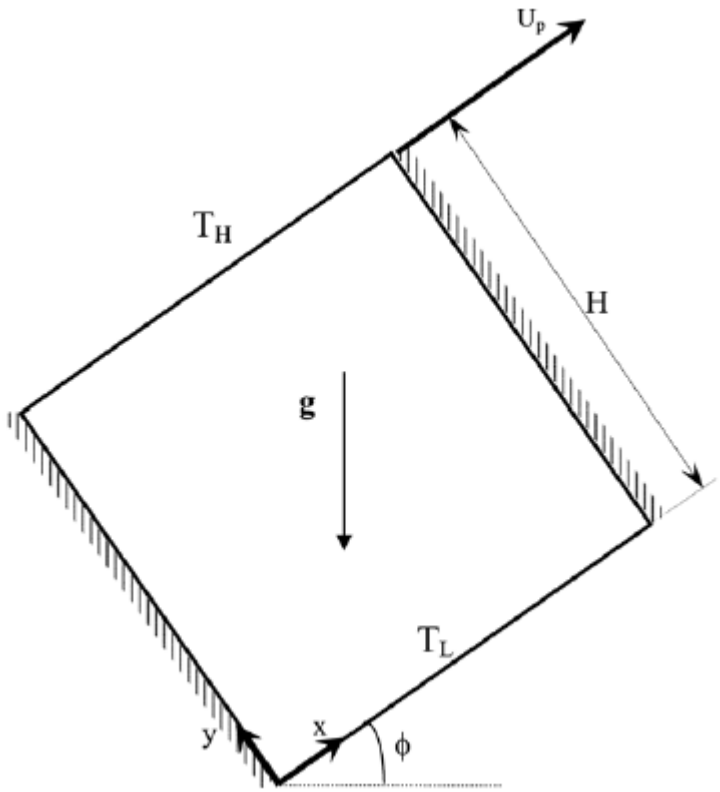
- پیوست (شامل برنامه‌های نوشته شده)

مراجع:

[1] Ghia, U.K.N.G., Ghia, K.N. and Shin, C.T., 1982. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of computational physics*,*48*(3), pp.387-411.

- **بخش امتیازی 2:**

هندسه حفره را به اندازه ϕ درجه دوران می دهیم.



برای محفظه مایل با زاویه 45° تاثیرات زاویه اعمالی را برای نمودار ها و کانتور های مختلف را همچون بخش اصلی پروژه نشان داده و نتایج را مقایسه و تحلیل کنید.