تمرین سری ۳ درس محاسبات عددی تاریخ تحویل: ۵ خرداد

۱- انتگرال زیر را با استفاده از روش سیمپسون یک سوم ابتدا با تقسیم بازه به دو بازه و سپس به چهار بازه محاسبه کنید و نتایج را با هم مقایسه کنید. از این مقایسه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [a\cos(x) + b\sin(x)]dx$$

که a و b به ترتیب دو رقم انتهایی شماره دانشجویی شماست. مثلا برای دانشجو با شماره 97123456 مقدار a=5 و b=6 است.

۲- مطلوب این سوال استفاده از روش رانج-کوتا مرتبه ۳ که جدول آن در زیر آمده است، برای محاسبه انتگرال $\int_0^1 \sin(x)\,dx$ با مقدار گام $\Delta x = 0.5$ است.

راهنمایی: از تابع اولیه $y(x) = \int_0^x \sin(t)\,dt$ مشتق بگیرید تا معادله دیفرانسیل مربوطه بدست آید. جدول ضرایب این روش عددی نیز در ذیل آمده است.

0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
1	-1	2	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

۳- فرض کنید که قصد داریم انتگرال تابع f در بازه صفر تا یک را با جمع دو مقدار تابع با ضرایب مشخص به صورت زیر تقریب بزنیم:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

مطلوب است تعیین ثوابت x_1، x_2 و c_2 به گونه ای که دقت انتگرال حداکثر شود. راهنمایی: مشابه روشی که برای یافتن ثوابت در روش Gauss Quadrature استفاده کردیم را به کار بگیرید.

۴- معادله ی دیفرانسیل زیر به معادله ی بلازیوس شهرت دارد.

$$2 * f''' + f * f'' = 0$$

تمرین سری ۳ درس محاسبات عددی تاریخ تحویل: ۵ خرداد

این معادله در حقیقت بیان کننده لایه مرزی جریان آرام دو بعدی بر روی یک صفحه ی تخت است. به منظور استخراج این معادله، از معادلات ناویر استوکس به همراه فرضیاتی ساده کننده و البته منطقی شروع و سپس بعد از ساده سازی به کمک تغییر متغییر زیر معادلات از فضای کارتزین به فضای η برده می شوند. در این رابطه U سرعت جریان آزاد و δ ضخامت لایه مرزی است.

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

در چنین حالتی تابع جریان به مانند رابطه ذیل قابل بیان است.

$$\psi = \sqrt{\nu U x} f(\eta)$$

با استفاده از تعریف تابع جریان مقادیر سرعت در دو جهت x , y نیز به ترتیب به مانند زیر قابل استخراج هستند.

$$u(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U f'(\eta), \quad v(x,y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}[\eta f'(\eta) - f(\eta)]$$

شرایط مرزی ارائه شده برای معادله ی بلازیوس نیز به مانند زیر قابل بیان هستند. شایان ذکر است که این شرایط از فیزیک جریان بر روی صفحه ی تخت به راحتی قابل استخراج می باشند.

$$\begin{aligned} u(x,0) = 0 \quad &\rightarrow \quad f'(0) = 0 \\ v(x,0) = 0 \quad &\rightarrow \quad f(0) = 0 \\ u(x,\infty) = U \quad &\rightarrow \quad f'(\infty) = 1 \end{aligned}$$

در این مرحله از شما خواسته می شود که به کمک حلگرهای موجود در نرم افزار متلب به منظور حل ODE، معادله ی بلازیوس به همراه شرایط مرزی را مورد حل عددی قرار دهید. مطلوبست تغییرات تابع f بر حسب η، و تغییرات $\frac{u}{U}$ را مورد ترسیم قرار دهید.

در شرایط مرزی ذکر شده منظور از بی نهایت، بالاتر از لایه مرزی است. به منظور پیشبرد حل در این حالت فرض کنید که بی نهایت مطرح شده همان $\eta = 5.29$ باشد.